Решения на задачи от изпита по Модул 3.2, проведен на 12 Юни 2010 г.

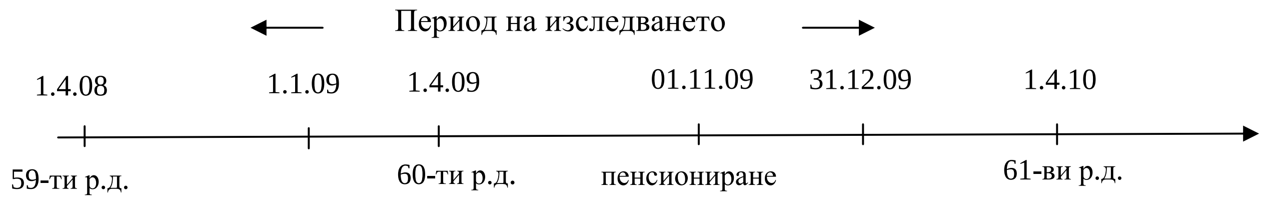
ЗАДАЧА 1.

Отг. Б

#

ЗАДАЧА 2.

(а) Лицата се групират по правилото x ненавършени години, което означава x-1 навършени години.



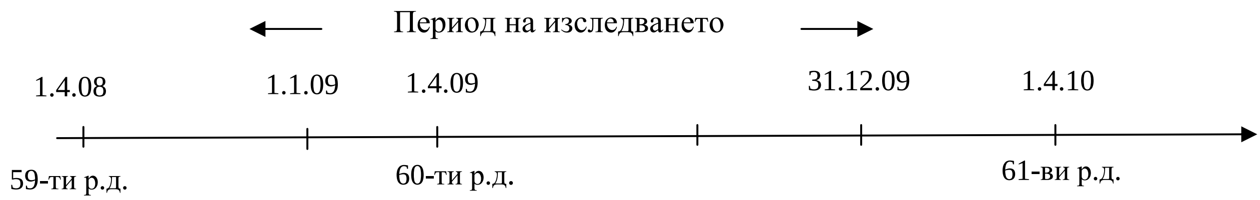
(i) $E^{c}_{61,i} = 7$ месеца: от 1.4.2009 (60-ри р.д.) до 1.11.2009 (пенсиониране) – възрастов клас 61 отговаря на възраст 60 навършени години

Отговор: Б

(ii) $E^{d}_{60,i} = 3$ месеца: от 1.1.2009 (началото на изследването) до 1.4.2009 (60-ти р.д.), защото възрастов клас 60 отговаря на възраст 59 навършени години. Отг. А

(iii) $E^{r,d}_{61,i} = 12$ месеца: от 1.4.2009 (60-ти р.д.) до 1.4.2010 (61-ви р.д., заради оттеглянето в пенсия). Отг. Г

(б)



$E^{r,d}_{61,i} = 9$ месеца: от 1.4.2009 (60-ти р.д.) до 31.12.2009. Отг. В

#

ЗАДАЧА 3.

i. Дефиницията за възрастта на смъртните случаи ни дава следната информация: x = възрастта според последния рожден ден + брой пълни години от началото на полицата, което е еквивалентно на:
   = възраст според последния рожден ден при годишнината на полицата, предхождаща смъртта.

Възрастта на лицата се променя от x на x+1 при годишнина на полицата, затова степенния интервал е: година на полицата, започващ в годишнината на полицата, когато лицето е на възраст x според последния рожден ден. Отг. А

ii. Тък като моментите на преброяването са свързани с календарната година, предположението, което трябва да се направи е, че **годишнините на полицата са равномерно разпределени през календарната година (между моментите на преброяването)**. Отг. А

iii. Възрастта, за която се отнасят степените е $x+f$, където $0 \le f < 1$. При предположнието, че рождените дни са равномерно разпределени между годишнините на полицата, средната стойност на f е ½ и точната възраст в началото на степенния интервал е x+1/2. Отг. В

#

ЗАДАЧА 4.

Степенният интервал е: година от живота на лицето, която започва когато лицето навърши възраст x: т.е лицето е на точна възрасти x в началото на степенния интервал.

$E_x^c = \int_0^2 P_x(t)dt$, където $P_x(t)$ са лицата на възраст x според последния рожден ден в момент t, което може да се изрази в термините на $P_x(dd.mm.yyyy)$.

Допускаме, че $P_x(dd.mm.yyyy)$ се изменя линейно между датите на преброяването.

Изложеността на риск за периода 01.01.2007 – 1.07.2007 е:

$$E_x^c{}' = \frac{1}{2}(P_x(01.01.2007) + P_x(01.07.2007)) * (\textit{периода}) = \frac{1}{4}(P_x(01.01.2007) + P_x(01.07.2007))$$

Аналогично изложеността за периода 01.07.2007 – 1.01.2009 ще бъде:

$$E_x^c{}'' = \frac{1}{2}(P_x(01.07.2007) + P_x(01.01.2009)) * (\textit{периода}) = \frac{3}{4}(P_x(01.07.2007) + P_x(01.01.2009))$$

с допускането, че $P_x(dd.mm.yyyy)$ се изменя линейно върху целия период от 1.5 години.

Общата изложеност за периода 01.01.2007 – 01.01.2009 е:

$$E_x^c = E_x^c{}' + E_x^c{}'' = \frac{1}{4}P_x(01.01.2007) + P_x(01.07.2007) + \frac{3}{4}P_x(01.01.2009)$$

Отг. А

#

ЗАДАЧА 5.

Отг. Г

#

ЗАДАЧА 6.

i. Отг. В

ii. Нека $\hat{n}_1$ е случайната величина за броя на положителните отклонения.

$\hat{n}_1 \sim Bi(92;0.5)$. Тъй като $n > 20$ може да се приложи нормална апроксимация към $\hat{n}_1$. $\hat{n}_1 \sim N(92/2;92/4)$. Следователно, случайната величина

$$\hat{z}(n_1) = \frac{\hat{n}_1 - 46}{\sqrt{23}} \sim \mathrm{N}(0;1)$$

$$z(n_1) = \frac{53 - 46}{\sqrt{23}} = \frac{7}{\sqrt{23}} = 1.4596.$$

При ниво на доверие 95%, имаме -1.96 < 1.46 < +1.96, което ни дава основание да приемем нулевата хипотеза. Отг. А

#

ЗАДАЧА 7.

За извършване на Хи-квадрат тест е необходимо да се пресметне сумата от квадратите на стандартните отклонения:

x	E_x	d_x	$E_x q_x$	z_x	$z_x^{\ 2}$
20–24	35 000	35	34	0.1715	0.029412
25–29	33 000	30	29	0.18569	0.034481
30–34	30 000	31	35	-0.67612	0.457138
35–39	30 000	45	52	-0.97072	0.942297
40–44	31 000	84	80	0.44721	0.199997
45–49	28 000	138	130	0.70165	0.492313
50–54	25 000	229	213	1.0963	1.201874
55–59	23 000	360	348	0.64327	0.413796
60–64	20 000	522	505	0.75649	0.572277

$$\hat{\chi}_n^2 = \sum_x \left(\hat{z}_x\right)^2 = 4.343585$$

$\hat{\chi}_n^2$ е случайна величина с Хи-квадрат разпределение с n степени на свобода. В случая n=9, тъй като групите на възрастите са 9.

Критичната стойност на Хи-квадрат разпределението с 9 степени на свобода е 16.919, която е по- голяма от стойността на $\hat{\chi}_n^2$, което означава, че приемаме градуировката като подходяща.

За теста на знаците:

Нека $\hat{n}_1$ е броят на положителните стандартни отклонения. $\hat{n}_1$ е Биномно разпределена случайна величнa с параметри 9 и 0.5.

Тъй като $n_1 = 7$, $n_1 > 9/2$ трябва да се пресметне следната вероятност

$$\Pr\left(\hat{n}_1 \geq 7\right) * 2 = 2 * \frac{1}{2^9} * \left[\binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9}\right] = \frac{1}{2^8} * \left[\frac{9!}{7!2!} + \frac{9!}{8!1!} + \frac{9!}{9!0!}\right] = \frac{46}{256} = 0.1796875,$$ тъй като тестът е двустранен.

Достатъчно е дори да се пресметне само вероятността броя на положителните отклонения да бъде точно 7:

$$\Pr\left(\hat{n}_1 = 7\right) = \frac{1}{2^9} * \binom{9}{7} = \frac{1}{2^9} * \left[\frac{9!}{7!2!}\right] = \frac{36}{512} = 0.0703125 \ .$$

Тази статистика е по- голяма от 0.025, (0.05/2) (тестът е симетричен). Резултатът от направения тест показва, че градуировката се приема като подходяща. Отг. А

#

ЗАДАЧА 8.

i. $$_{5|5}q_{80:85} = {}_5p_{80:85} - {}_{10}p_{80:85} = \frac{l_{85}}{l_{80}} \times \frac{l_{90}}{l_{85}} - \frac{l_{90}}{l_{80}} \times \frac{l_{95}}{l_{85}} =$$
$$= \frac{2608.5274}{12522.89} - \frac{2608.5274}{12522.89} \times \frac{614.37801}{6766.5922} \approx 0.18939 \text{. Отг. Б}$$

ii. $$_5p_{\overline{80:85}} = {}_5p_{80} + {}_5p_{85} - {}_5p_{80:85} = \frac{l_{85}}{l_{80}} + \frac{l_{90}}{l_{85}} - \frac{l_{85}}{l_{80}} \times \frac{l_{90}}{l_{85}} =$$
$$= \frac{6766.5922}{12522.89} + \frac{2608.5274}{6766.5922} - \frac{6766.5922}{12522.89} \times \frac{2608.5274}{6766.5922} \approx 0.71754 \text{. Отг. В}$$

#

ЗАДАЧА 9.

$$P(K_x \geq 3) = 1 - P(K_x = 0) - P(K_x = 1) - P(K_x = 2) = 0.99$$

$$P(K_y \geq 3) = 1 - P(K_y = 0) - P(K_y = 1) - P(K_y = 2) = 0.981$$

$$_3E_{xy} = v^3 \times {}_3p_{xy} = v^3 \times {}_3p_x \times {}_3p_y = v^3 \times P(K_x \geq 3) \times P(K_y \geq 3) = 1.03^{-3} \times 0.99 \times 0.981 \approx 0.88877$$
Отг. В

#

ЗАДАЧА 10.

i. Отг. Б

ii. $a_{\overline{xy}|z} = a_z - a_{\overline{xy}:z} = a_z - (a_{xz} + a_{yz} - a_{xyz})$. Отг. Г

#

ЗАДАЧА 11.

$$A^{\ \ 2}_{[20]:[20]} = A_{[20]} - A^{\ \ 1}_{[20]:[20]} = A_{[20]} - \frac{1}{2} A_{[20]:[20]} = A_{[20]} - \frac{1}{2} \times \left(1 - d \times \ddot{a}_{[20]:[20]}\right) =$$
$$= 0.13312 - 0.5 \times (1 - 0.038462 \times 21.509) \approx 0.04676 \text{. Отг. А}$$

#

ЗАДАЧА 12.

Отговор: Г

#

ЗАДАЧА 13.

Отговор: Б

#

ЗАДАЧА 14.

i. $\frac{120000}{80}\times\frac{M_{45}^{ia}+M_{45}^{ra}}{D_{45}}+\frac{15000}{80}\times\frac{{}^{s}\overline{R}_{45}^{ia}+{}^{s}\overline{R}_{45}^{ra}}{{}^{s}D_{45}}=$

$=\frac{120000}{80}\times\frac{(1572+16742)}{4022}+\frac{15000}{80}\times\frac{(97957+1442047)}{16411}\approx 24425$. Отг. Б

ii. $5\%\times 15000\times\frac{{}^{s}\overline{N}_{45}}{{}^{s}D_{45}}=5\%\times 15000\times\frac{231108}{16411}\approx 10562$. Отг. В

iii. $6500\times\frac{{}^{j}M_{45}^{d}}{{}^{j}D_{45}}+\frac{5\%\times 15000\times{}^{sj}\overline{R}_{45}^{d}}{{}^{s}D_{45}}=\frac{6500\times 2120}{(1.03)^{45}\times 4022}+\frac{5\%\times 15000\times 24285}{16411}\approx 2016$.

Отг. В

#