

Решения на задачи от изпита по Модул 3.1, проведен на 27 Септември 2009 г.

Зад.1

$$g(K) = \begin{cases} v^1, & K \leq 1 \\ 0, & K > 1 \end{cases}, \text{ където } K \text{ е случайна величина, моделираща остатъка на живот.}$$

За единица застрахователна сума, очакването и дисперсията са:

$$E[g(K)] = vq_{[50]} = 1.09^{-1} * 0.00286243 = 0.002626082$$

$$V[g(K)] = v^2q_{[50]} - (vq_{[50]})^2 = 1.09^{-2} * 0.00286243 - 0.002626082^2 = 0.002402353$$

За застрахователна сума от 100 000, стандартното е:

$$100000 * \sqrt{V[g(K)]} = 100000 * \sqrt{0.002402353} \approx 4901. \text{ Отг. Б}$$

#

Зад.2

Очакваният лихвен процент за една година е:

$$j = 4\% * 0.3 + 6\% * 0.5 + 8\% * 0.2 = 5.8\%$$

$$(i) \quad E(S_8) = 1000 * (1 + j)^8 = 1000 * (1.058)^8 = 1569.95 \text{ Отг. А}$$

(ii) Дисперсията на лихвения процент е:

$$s^2 = 0.04^2 * 0.3 + 0.06^2 * 0.5 + 0.08^2 * 0.2 - j^2 = 0.00356 - 0.003364 = 0.000196$$

$$Var(S_8) = 1000^2 * [(1 + j)^2 + s^2]^8 - (1 + j)^{2*8} = 1000^2 ((1.058^2 + 0.000196)^8 - 1.058^{16}) = 3454.71$$

$$SD(S_8) = \sqrt{Var(S_8)} = \sqrt{3454.71} = 58.78. \text{ Отг. В}$$

#

Зад.3

T_{63} е случайната величина, моделираща оставащия живот на лице на възраст 63.

(i) Настоящата стойност на непрекъснат анюитет платим веднага е: $5000\bar{a}_{T_{63}}$
 . Настоящата стойност на непрекъснат анюитет, но отложен с две години е:

$$g(T) = \begin{cases} 5000(\bar{a}_{T_{63}} - \bar{a}_{\overline{2}|}) & , T_{63} \geq 2 \\ 0 & , T_{63} < 2 \end{cases}$$

Отг. А

$$(ii) \quad E[g(T)] = 100 * 5000 * v^2 * {}_2p_{63} * \bar{a}_{65} \approx 5 * 10^5 * (1.04)^{-2} * \frac{l_{65}}{l_{63}} * (\ddot{a}_{65} - \frac{1}{2}) =$$

$$= 5 * 10^5 * (1.04)^{-2} * \frac{27442.681}{28615.051} * (10.737 - 0.5) = 4538455.088 \approx 4.538 \text{ млн. Отг. В}$$

#

Зад.4

$$(aq)_x^a \approx q_x^a \left[1 - \frac{1}{2}(q_x^\beta + q_x^\gamma) + \frac{1}{3}q_x^\beta q_x^\gamma \right]. \text{ Отг. А}$$

#

Зад.5

$$(al)_{51} = (al)_{50} * \exp\left(-\int_{50}^{51} (a\mu)_x dx\right) = 1000 * \exp\left(-\int_{50}^{51} 0.05 ds\right) = 1000 * \exp(-0.05) \approx 951.23$$

$$(ad)_{50} = (al)_{50} - (al)_{51} = 1000 - 951.23 = 48.77$$

$$(ad)_{50}^2 = (ad)_{50} - (ad)_{50}^1 = 48.77 - 40 = 8.77 \approx 9. \text{ Отг. В}$$

#

Зад.6

(i) Остатъкът от размера на заема на 1.08.2005 година е:

$$1000 * v^{\frac{10}{12}} (1 + 1.02v^{\frac{1}{3}} + \dots + 1.02^{14} v^{\frac{5-\frac{1}{3}}{3}}) = 1000 * (1.09)^{-\frac{10}{12}} \left[\frac{1 - (1.09^{-\frac{1}{3}} 1.02)^{15}}{1 - (1.09^{-\frac{1}{3}} 1.02)} \right] = 13124.96$$

≈ 13125 . Отг. А

(ii) Стойността на заема на 31.05.2006 е:

$$13125 * 1.09^{\frac{10}{12}} = 14102.24$$

Размерът на лихвата, платена с първата вноска е = $14102.24 - 13125 = 977.24$

Размерът на главницата, изплатена от първата вноска = $1000 - 977.24 = 22.76 \approx 23$.

Отг. А

(iii) Капиталът, който остава да бъде изплатен след 6-тата вноска – настоящата стойност на оставащите вноски на 1.02.2008:

$$1000 * 1.02^6 (v^{\frac{4}{12}} + 1.02v^{\frac{8}{12}} + 1.02^2 v^{\frac{12}{12}} + \dots + 1.02^8 v^{\frac{36}{12}}) = 1000 * 1.02^6 v^{\frac{4}{12}} \left[\frac{1 - (v^{\frac{4}{12}} 1.02)^9}{1 - (v^{\frac{4}{12}} 1.02)} \right] =$$

$$= 1000 * 1.02^6 1.09^{-\frac{4}{12}} * 8.6867328 = 9505.65$$

Размерът на лихвата в 7-мата вноска е: $9505.65 * \left(1.09^{\frac{4}{12}} - 1 \right) = 277.02 \approx 277$. Отг. Г

#

Зад.7

$$(i) PV(A) = \frac{3.5}{1.04^{10}} = 2.364475 \text{ млн}$$

$$NPV(A) = PV(A) - 1 = 2.364475 - 1 \approx 1.364 \text{ млн. Отг. А}$$

$$(ii) PV(B) = 0.08 \bar{a}_{\overline{10}|} + 0.09 v \bar{a}_{\overline{10}|} + \dots + 0.17 v^9 \bar{a}_{\overline{10}|} = 0.07 \bar{a}_{\overline{10}|} + 0.01 (Ia)_{\overline{10}|} =$$

$$= \frac{0.04}{0.039221} \left(0.07 * a_{\overline{10}|} + 0.01 * \frac{\ddot{a}_{\overline{10}|} - 10v^{10}}{0.04} \right) = 1.019862 * (0.567763 + 0.419923) = 1.007303$$

$$v^{10} = 0.675564 \quad a_{\overline{10}|} = 8.110896$$

$$NPV(B) = PV(B) - 1 = 1.007303 - 1 \approx 0.007 \text{ млн. Отг. А}$$

$$(iii) PV(B) = 1 * 10^6 \cdot \frac{1.06^{10}}{1.04^{10}} = 1.209832 \text{ млн}$$

$$NPV(B) = PV(B) - 1 = 1.209832 - 1 = 0.209832 \text{ млн}$$

$$NPV(A) > NPV(B) > NPV(C). \text{ Отг. А.}$$

#

Зад.8

Уравнението на стойността е:

$$12P\ddot{a}_{60}^{(12)} = 50000A_{60,4\%} + 5\% * 12 * P\ddot{a}_{60}^{(12)} + 1.5\% * 50000A_{60,4\%}$$

$$P = \frac{1.015 * 50000 A_{60,4\%}}{12 * 0.95 * (\ddot{a}_{60} - \frac{11}{24})} = \frac{50750 * 0.51726}{11.4 * (12.551 - \frac{11}{24})} = 190.42 \text{ . Отг. Г}$$

#

Зад.9

Очакваната настояща стойност на обезщетението е:

$$110000 A_{50:\overline{10}|4\%} - 10000 (IA)_{50:\overline{10}|4\%} = 110000 * (A_{50} - v^{10} p_{50} A_{60}) - 10000 ((IA)_{50} - v^{10} p_{50} * (10A_{60} + (IA)_{60})) =$$

Уравнението на стойността е:

$$P \ddot{a}_{50:\overline{10}|} = 200 + 25\%P + 2\%Pa_{50:\overline{9}|} + 50a_{50:\overline{9}|} + 200A_{50:\overline{10}|} + 110000A_{50:\overline{10}|} - 10000(IA)_{50:\overline{10}|}$$

$$P \ddot{a}_{50:\overline{10}|} = 150 + 23\%P + 2\%P\ddot{a}_{50:\overline{10}|} + 50\ddot{a}_{50:\overline{10}|} + 110200A_{50:\overline{10}|} - 10000(IA)_{50:\overline{10}|}$$

От тук пресмятаме премията:

$$P = \frac{150 + 50\ddot{a}_{50:\overline{10}|} + 110200A_{50:\overline{10}|} - 10000(IA)_{50:\overline{10}|}}{0.98\ddot{a}_{50:\overline{10}|} - 0.23}$$

$$P = \frac{150 + 50 \frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}} + 110200 \frac{M_{50} - M_{60}}{D_{50}} - 10000 \frac{R_{50} - R_{60} - 10M_{60}}{D_{50}}}{0.98 \frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}} - 0.23}$$

$$P \approx \frac{150 + 50 * 8.207 + 110200 * 0.06319 - 10000 * 0.38038}{0.98 * 8.207 - 0.23} \approx 476.15$$

Отг. Б

$$(ii) {}_9V = 10000q_{59} * v + 200q_{59} * v + 50 + 2\%P - P = 10200q_{59}v + 50 - 0.98P = 10200 * 0.01299373 * 1.04^{-1} + 50 - 0.98 * 476 = -289.04149 \approx -289 \text{ . Отг. Б}$$

#

Зад.10

(i) Уравнението на стойността е:

$$P * \ddot{a}_{44:\overline{10}|4\%} = 5000 * \frac{D_{54}}{D_{44}} a_{54:\overline{10}|4\%}$$

$$P * \left(\frac{N_{44} - N_{54}}{D_{44}} \right) = 5000 * \frac{D_{54}}{D_{44}} * \left(\frac{N_{55} - N_{65}}{D_{54}} \right)$$

$$P = 5000 * \left(\frac{N_{55} - N_{65}}{N_{44} - N_{54}} \right) = 5000 * \frac{52502.752 - 23021.434}{105687.13 - 56342.918} = 2987.31 \approx 2987 \text{ . Отг. В}$$

(ii) Стойността на полицата в края на 2012 е:

$${}_{15}V = 5000a_{59:\overline{5}|4\%} - P * 0 = 5000 * \left(\frac{N_{60} - N_{65}}{D_{59}} \right) = 5000 * \left(\frac{35841.261 - 23021.434}{3008.915} \right) = 21303.07$$

EDS за година 2012 е:

$$EDS = -q_{58}(5000 + {}_{15}V) = -0.01168566 * (5000 + 21303.07) = -307.37 \approx -307 \text{ . Отг. Б}$$

(iii) Ако анюитантът почине през 2012, ADS за година 2012 ще бъде:
 $ADS = -(5000 + {}_15V) = -(5000 + 21303.07) = -26303.07 \approx -26303$. Отг. А

#

Зад.11

За по-добра разбираемост използваме следните помощни таблици:

Възраст	q_x	p_x	${}_{t-1}p_x$
60	0.01443246	0.98556754	1
61	0.01601356	0.98398644	0.98556754
62	0.01774972	0.98225028	0.96978510

Год.	Премия	Разходи	Резерв в началото	Лихва	Изплащане при смърт	Резерв в края	Вектор на печалбата	Сигнатура на печалбата	Нетна наст. стойност
1	3000	1250	0	123	1443	2957	-2527.45	-2527.45	-2197.78
2	3000	115	3000	202	1601	2952	1743.63	1718.47	1299.41
3	3000	115	3000	202	1775	0	4521.98	4385.35	2833.44
									1985.07

(i) Настоящата стойност на печалбата в първата година е:

$$\begin{aligned}
 NPV(\text{Pr } o_1) &= \sigma_1 * 1.15^{-1} = \text{Pr } o_1 * {}_0p_{60} * 1.15^{-1} \\
 &= (P_1 - E_1 + i * (P_1 - E_1) - S_1 * q_{60} + (1+i) * {}_0V - {}_1V * p_{60}) * {}_0p_{60} * 1.15^{-1} \quad \text{Отг. А} \\
 &= ((P - E) * (1+i) - S_1 * q_{60} - P * p_{60}) * 1.15^{-1} \approx -2527 * 1.15^{-1} \approx -2198
 \end{aligned}$$

(ii) Сигнатура на печалбата:

$$\begin{aligned}
 \sigma_t &= \text{Pr } o_{t \cdot t-1} p_{60} \\
 \sigma_1 &= (P_1 - E_1 + i * (P_1 - E_1) - S_1 * q_{60} + (1+i) * {}_0V - {}_1V * p_{60}) * 1 = -2527.45 \approx -2527 \\
 \sigma_2 &= (P_2 - E_2 + i * (P_2 - E_2) - S_2 * q_{61} + (1+i) * {}_1V - {}_2V * p_{61}) * {}_1p_{60} = 1718.47 \approx 1718 \\
 \sigma_3 &= (P_3 - E_3 + i * (P_3 - E_3) - S_3 * q_{62} + (1+i) * {}_2V - {}_3V * p_{62}) * {}_2p_{60} = 4385.35 \approx 4385 \quad \text{Отг. А}
 \end{aligned}$$

(iii) Нетната настояща печалба:

$$\begin{aligned}
 NPV(\text{Profit}) &= \sum_{t=1}^3 \sigma_t * (1.15)^{-t} \\
 &= -2527.45 * (1.15)^{-1} + 1718.47 * (1.15)^{-2} + 4385.35 * (1.15)^{-3} = 1985.07 \approx 1985
 \end{aligned}$$

Отг. А

#