Българско Актюерско Дружество

Курс за професионално обучение по актюерски науки и тяхното приложение

Изпитни въпроси по модул 2. Статистически методи
за изпита в София на 28 ноември 2009 г.

Време за изпита: 120 минути

Общ брой въпроси: 10 с общо 16 подточки

Общ брой точки: 30

Забележка: Броят точки за всеки въпрос е указан в скобки.

При всеки въпрос **<u>оградете с кръгче</u>** само един верен отговор. Например, ако мислите че **Б** е верния отговор, би трябвало да отговорите:

А

Б

В

Г

Ако искате да промените дадения от Вас отговор, зачеркнете го. Например, ако решите да промените отговора си от **Б** на **В**, трябва да отбележите:

А

Б

В

Г

Следните формули и таблици са дадени на разположение на участниците в изпита:

(а) Ако случайната величина N има биномно разпределение с параметри n и p, то $\Pr(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ за $k = 0,1,2,\ldots,n$, където $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k! = 1 \times 2 \times \ldots \times k$ и $0! = 1$. $E(N) = np$ и $V(N) = np(1 - p)$.

(б) Ако случайната величина X има експоненциално разпределение със средно θ, то вероятностната плътност е $f(x) = \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)$, а функцията на разпределение е $F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)$. Дисперсията на X е θ^2.

(в) Ако случайната величина X има нормално разпределение със средно μ и дисперсия σ^2, то вероятностната плътност е $f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.

Функцията на разпределение на стандартното нормално разпределение $\Phi(z)$ е табулирана на следващата страница.

(г) Ако случайната величина X има равномерно разпределение в интервала (a, b), то вероятностната плътност е $f(x) = \frac{1}{b-a}$, а функцията на разпределение е $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

$E(X) = \frac{a+b}{2}$ и $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

(д) Множителят на достоверност в Емпиричната бейсовата теория на достоверността е

$$Z = \frac{n}{n + \frac{E[s^2(\theta)]}{V[m(\theta)]}}.$$

(е) Средното и дисперсия на общата (агрегираната) сума на исковете S в модела на индивидуалния риск се дават от

$$E(S) = \sum q_i\mu_i \text{ и } V(S) = \sum \{q_i\sigma_i^2 + \mu_i^2 q_i(1 - q_i)\}.$$

(ж) Средното и дисперсията на общата (агрегираната) сума на исковете S в модела на колективния риск се дават от

$$E(S) = E(N)E(X) \text{ и } V(S) = E(N)V(X) + [E(X)]^2 V(N).$$

(з) Относителното натоварване (добавка) за сигурност е $\theta = \frac{z[V(S)]^{1/2}}{E[S]}$.

(и) Пораждащата функция на моментите на случайната величина X е $M_X(t) = E(e^{X.t})$.

Таблица за функцията на разпределение
на стандартното нормално разпределение

Аргументът на $\Phi(z)$ е разложен на $z = z_1 + z_2$. Табулирани са стойностите на $\Phi(z)$ за $0 \le z \le 2.99$ през 0.01. За $z < 0$ се прилага $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

z_1 \ z_2	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

ЗАДАЧА 1. [Общо 6 точки]

Един застраховател издава 5000 независими полици, като броят на исковете по всяка от тях има поасоново разпределение със средно 0.03. Разпределението на размера на иска, X, когато такъв настъпи, е дадено в таблицата:

Размер на иска	30	60	90	120
Вероятност	0.35	0.3	0.25	0.1

(i) Стойността на $E(X)$ е:

А 53 Б 58 В 63 Г 68

[1 точка]

(ii) Стойността на $E(X^2)$ е:

А 3860 Б 4860 В 5860 Г 6860

[1 точка]

(iii) Компанията иска да бъде 95% сигурна, че ще постигне печалба по този портфейл. Минималната относителна добавка за сигурност (с точност до 1%), която ще постигне това, е:

А 15% Б 17% В 20% Г 24%

[2 точки]

(iv) Компанията изследва ефекта от прилагането на безусловен франшиз в размер на 40 единици (т.е. в този случай при иск компанията плаща разликата от 40 единици до размера на щетата) и иска да бъде 99% сигурна, че ще постигне печалба по този портфейл. Минималната относителната добавка за сигурност (с точност до 1%), която ще постигне това, е:

А 19% Б 23% В 27% Г 31%

[2 точки]

ЗАДАЧА 2. [ОБЩО 3 точки]

В една застрахователна компания щетите, които се предявяват по застраховка „Каско” имат приблизително нормално разпределение със средно 19400 и стандартно отклонение 5000.

Каква е вероятността средната стойност на 25 случайно избрани щети да надхвърли 20000?

А. 0.15

Б. 0.27

В. 0.33

Г. 0.45

Моля обърни!

ЗАДАЧА 3. [ОБЩО 3 точки]

Застрахователна компания застрахова шофьори от всички възрасти. Статистиката на компанията за застрахованите шофьори е следната:

Възраст на шофьора	Вероятност за настъпване на щета	Процент от застрахованите шофьори в компанията
16 - 20	0.06	8 %
21 – 30	0.03	15%
31 - 65	0.02	49%
66 - 99	0.04	28%

Случайно избран застрахован шофьор е участник в ПТП (има настъпила щета). Изчислете каква е вероятността този шофьор да е във възрастова група 16-20.

А. 0.16

Б. 0.19

В. 0.23

Г. 0.40

ЗАДАЧА 4. [ОБЩО 2 точки]

Застрахователна компания анализира свой портфейл от 10000 полици от миналия си опит. Броят на щетите по една полица се моделира с Поасоново разпределение с параметър 1. Наблюдаваният и очакваният брой на щетите са дадени в следната таблица:

Брой щети	Брой полици	Очакван брой полици
0	3680	3678.79
1	3690	3678.79
2	1850	1839.40
3	610	613.13
4	140	***U***
>=5	30	***V***

i. Произведението $U*V$, закръглено до десетици, е:

А. 4630

Б. 4700

В. 4850

Г. 5610

[1 точка]

Моля обърни!

ii. Използвайки горната таблица (с намерените U с V) пресметнете стойността на статистиката χ^2.

A. 1.3

Б. 1.4

В. 2.5

Г. 2.8

[1 точка]

ЗАДАЧА 5. [ОБЩО 3 точки]

Застрахователна компания издава 1250 полици „Домашно имущество” годишно. Броят на щетите (исковете), предявени от един застрахован в рамките на една година по една полица „Домашно имущество” са поасоново разпределени величини със средно 2. Нека допуснем, че броят на щетите (исковете) предявени от всеки застрахован са независими величини.
Каква е приблизителната вероятност общия брой на предявените, в рамките на една година, щети да бъде между 2450 и 2600?

A. 0.68

Б. 0.82

В. 0.87

Г. 0.95

ЗАДАЧА 6. [ОБЩО 3 точки]

Застрахователна компания продава „Каско застраховки” с франшиз 100 лева. Възникналите щети (искове) са експоненциално разпределени величини със средно 300.
Какъв е приблизително 95-тия процентил на (реалните) щетите (общата щета преди приспадане на самоучастието), които надхвърлят франшиза?

A. 700

Б. 800

В. 900

Г. 1000

Моля обърни!

ЗАДАЧА 7. [ОБЩО 2 точки]

Размерът на всяка щета от даден клас застраховки е случайна величина, X, с пораждаща функция на моментите:

$$M_X(t) = 1/ (1-2500t)^4$$

i. Очакването на размера на щетата от този клас застраховки е:

А. 50

Б. 100

В. 2500

Г. 10000

[1 точка]

ii. Стандартното отклонение на размера на щетата от този клас застраховки е:

А. 1340

Б. 5000

В. 8660

Г. 10000

[1 точка]

ЗАДАЧА 8. [ОБЩО 2 точки]

$X \in Bi(10,0.03)$, т.е X е Биномно разпределена случайна величина с параметри (10, 0.03) и $M_X(t)$ е нейнатата пораждаща функция на моментите. Стойността на $M_X(1)$ е:

А. 0.29

Б. 0.30

В. 1.00

Г. 1.65

Моля обърни!

ЗАДАЧА 9. [ОБЩО 3 точки]

Една застрахователна компания притежава хомогенен портфейл от имуществени застраховки. Вероятността за настъпване на застрахователно събитие през срока на застрахователното покритие на една имуществена застраховка е 0.04. Размерът на щетата, при условие че е настъпило застрахователно събитие, е с вероятностна плътност $f(x) = \frac{1}{100}, x \in (0,100)$

i. Очакваната сума, която компанията ще плати по една застраховка е:

А. 0.25

Б. 0.50

В. 1.00

Г. 2.00

[1 точка]

ii. Дисперсията на сумата, която компанията ще плати е:

А. 33.33

Б. 129.33

В. 133.33

Г. 833.33

[2 точки]

ЗАДАЧА 10. [ОБЩО 3 точки]

Вероятността един имот да бъде повреден за определен застрахователен период е 0.10. Вероятностното разпределение на една загуба, ако тя настъпи, е експоненциално със средно 100. Собственикът на имота има функция на полезност $u(x) = -\exp(-0.005x)$. Максималната застрахователна премия, използвайки теорията на полезността, която собственикът би платил е:

А. 10.05

Б. 12.96

В. 17.63

Г. 19.06

К Р А Й