Българско Актюерско Дружество

Решения на задачите от изпита по Модул 2, проведен на 28 ноември 2009 г.

ЗАДАЧА 1. [Общо 6 точки]

Решение:

(i) $E(X) = 30\times 0.35 + 60\times 0.3 + 90\times 0.25 + 120\times 0.1 = 63$. Отг. В.

(ii) $E(X^2) = 30^2\times 0.35 + 60^2\times 0.3 + 90^2\times 0.25 + 120^2\times 0.1 = 4860$. Отг. Б.

(iii) Броят на исковете по една полица има поасоново разпределение със средно (и дисперсия) 0.03. Може да се покаже, че броят на исковете по целия портфейл има поасоново разпределение със средно (и дисперсия) $5000\times 0.03 = 150$. Алтернативно, като използваме Централна гранична теорема, може да апроксимираме броя на исковете по целия портфейл с нормално разпределение със средно $5000\times 0.03 = 150$ и дисперсия $5000\times 0.03 = 150$.

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 4860 - 63^2$

$E(S) = 150\times 63 = 9450$

$V(S) = 150\times (4860 - 63^2) + 150\times 63^2 = 150\times 4860 = 729000$

$\Phi(z) = 0.95$ за $z = 1.645$ и $\theta = \dfrac{1.645\times\sqrt{729000}}{9450} \approx 0.1486 \approx 15\%$. Отг. А.

(iv) Новото разпределение на размера на иска, X, е:

Размер на иска	0	20	50	80
Вероятност	0.35	0.3	0.25	0.1

Аналогично на по-горе намираме:

$E(X) = 26.5$, $E(X^2) = 1385$, $E(S) = 150\times 26.5 = 3975$ и $V(S) = 150\times 1385 = 207750$.

Тогава $\theta = \dfrac{2.33\times\sqrt{207750}}{3975} \approx 0.2671 \approx 27\%$. Отг. В.

(Забележка: За намиране на $E(S)$ и $V(S)$ в подточки (iii) и (iv) може да подходите и по друг начин. Използвайки модела на колективния риск, получете средното и дисперсията на общия иск на ниво полица, след което приложете формулите за средно и дисперсия на сума от независими и еднакво разпределени случайни величини.)

#

ЗАДАЧА 2. [ОБЩО 3 точки]

Решение:

Нека с $X_1,...,X_{25}$ означим 25-те щети и нека $X_c = \dfrac{X_1 + ... + X_{25}}{25}$.

Знаем, че $X_i (i = 1,...,25)$ е нормално разпределена величина със средно 19400 и стандартно отклонение 5000. От тук следва, че X_c е също нормално разпределена величина и $E(X_c) = 19400$ и $V(X_c) = 5000/\sqrt{25} = 1000$.

Следователно може да заключим, че:

$P(X_c > 20000) = P(\dfrac{X_c - 19400}{1000} > \dfrac{20000 - 19400}{1000}) = 1 - \Phi(0.6) = 1 - 0.7257 \approx 0.27$. Отг. Б.

#

ЗАДАЧА 3. [ОБЩО 3 точки]

Решение:

Неза означим с:

A = събитие „щета”

B_1 = събитие „шофьора е във възрастова група 16-20”

B_2 = събитие „шофьора е във възрастова група 21-30”

B_3 = събитие „шофьора е във възрастова група 30-65”

B_4 = събитие „шофьора е във възрастова група 66-99”

От формулата на Бейс:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) + P(A|B_4)P(B_4)} =$$

$$= \frac{0.06 \times 0.08}{0.06 \times 0.08 + 0.03 \times 0.15 + 0.02 \times 0.49 + 0.04 \times 0.28} = 0.1584 \approx 0.16.$$

Отг. А.

#

ЗАДАЧА 4. [ОБЩО 2. точки]

Решение:

i. $U = 10000\frac{\lambda^4}{4!}\exp(-\lambda) = 10000\frac{1^4}{4!}\exp(-1) = 153.28$

$V = 10000 - (3678.79 + 3678.79 + 1839.40 + 613.13 + 153.28) = 36.61$, тогава

$U \times V = 153.28 \times 36.61 \approx 5610$. Отг. Г.

ii.

$$\chi^2 = \frac{(3680 - 3678.79)^2}{3678.79} + \frac{(3690 - 3678.79)^2}{3678.79} + \frac{(1850 - 1839.40)^2}{1839.40} + \frac{(610 - 613.13)^2}{613.13} +$$

$$+ \frac{(140 - 153.28)^2}{153.28} + \frac{(30 - 36.61)^2}{36.61} \approx 2.5$$

Отг. В.

#

ЗАДАЧА 5. [ОБЩО 3 точки]

Решение:

Нека $X_1,...,X_{1250}$ са броя на щетите предявени от всеки един от 1250-те застраховани.

От X_i – поасоново разпределена случайна величина със средно 2 $\Rightarrow$ $E(X_i) = V(X_i) = 2$.

Интересува ни случайната величина $S = X_1 + \ldots\ldots + X_{1250}$.

Т.к. случайните величини $X_i (i = 1,...,1250)$ са независими, то $S = X_1 + ... + X_{1250}$ е нормално разпределена величина със $E(S) = V(S) = 2 \times 1250 = 2500$.

Използвайки нормално приближение за $Z = \frac{S - 2500}{\sqrt{2500}}$, получаваме:

$$P(2450 < S < 2600) = P(-1 < \frac{S - 2500}{50} < 2) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) \approx 0.9772 + 0.8413 - 1 \approx 0.82.$$

Отг. Б.

#

ЗАДАЧА 6. [ОБЩО 3 точки]

Решение: Нека Y са щетите(общия размер, без приспадане на самоучастието), надхвърлящи франшиза, тогава $P(Y > y) = P(X > y | X > 100)$.

Знаем, че X е експоненциално разпределена случайна величина със средно 300, т.е. $F_X(x) = 1 - \exp(-\frac{x}{300})$ и трябва да намерим 95-тия процентил на всички щети, които надхвърлят 100 лева. Или $p_{95\%}$ да е такова че:

$$0.95 = P(Y < p_{95\%}) = \frac{P(100 < X < p_{95\%})}{P(X > 100)} = \frac{F(p_{95\%}) - F(100)}{1 - F(100)}.$$

От тук имаме $0.95 = \dfrac{1 - \exp(-\frac{p_{95\%}}{300}) - (1 - \exp(-\frac{100}{300}))}{1 - (1 - \exp(-\frac{100}{300}))} = 1 - \exp(-\frac{p_{95\%} - 100}{300})$

От тук намираме $p_{95\%} = 100 - 300 \ln 0.05 \approx 999$. Отг. Г.

#

ЗАДАЧА 7. [ОБЩО 2 точки]

Решение:

Имаме дадена функция на моментите $M_x(t) = 1/(1\text{-}2500t)^4$

Пресмятаме 1-та и 2-та производна:

$$M'_X(t) = (4 \times 2500)\frac{1}{(1 - 2500t)^5} = 10000\frac{1}{(1 - 2500t)^5}$$

$$M''_X(t) = 10000 \times (5 \times 2500)\frac{1}{(1 - 2500t)^6} = 125 \times 10^6 \frac{1}{(1 - 2500t)^6}$$

i. $E(X) = M'_X(0) = 10000$. Отг. Г.

ii. $E(X^2) = M''(0) = 125 \times 10^6$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 125 \times 10^6 - 10000^2 = 25 \times 10^6$

Стандартното отклонение е: $\sqrt{V(X)} = 5000$. Отг. Б.

#

ЗАДАЧА 8. [ОБЩО 2 точки]

Решение:

$$M_X(t) = E\exp(t.X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} e^{t.k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1 - p)^{n-k} = (1 - p + pe^t)^n$$

$M_X(1) = (1 - 0.03 + 0.03\exp(1))^{10} \approx 1.65$. Отг. Г.

#

ЗАДАЧА 9. [ОБЩО 3 точки]

Решение:

Случайната величина X, моделираща размера на щетата, е равномерно разпределена в интервала (0, 100). Тогава $EX = \frac{100}{2} = 50$ и $Var(X) = \frac{100^2}{12} = 833.33$

i. Очакваната сума, която компанията ще плати по една застраховка е:
$E(S) = 0.04 \times 50 = 2$. Отг. Г.

ii. $V(S) = q_i\sigma_i^2 + \mu_i^2 q_i(1 - q_i) = 0.04 \times 833.33 + 50^2 \times 0.04 \times (1 - 0.04) \approx 129.33$. Отг. Б.

#

ЗАДАЧА 10. [ОБЩО 3 точки]

Решение:

Нека a – състоянието на собственика, G – размера на премията, X – размера на загубата.

$u(a - G) = E(u(a - X))$, заместваме:

$$-\exp(-0.005(a - G)) = 0.9 \times u(a) + 0.1 \times \int_0^\infty u(a - X).f(x)dx$$

$$-\exp(-0.005(a - G)) = -0.9 \times \exp(-0.005a) - 0.1 \times \int_0^\infty \exp(-0.005(a - x))\frac{\exp(-0.01x)}{100}dx$$

$$-\exp(0.005G) = -0.9 - 0.1 \times \frac{1}{0.5}$$

$G = \frac{\ln 1.1}{0.005} \approx 19.06$. Отг. Г.

#